Apellido: .................................... Nombre: ....................................

Legajo:.....................

# MATEMATICA SUPERIOR

2do Parcial

Curso: K3051 (LUNES Y JUEVES noche 2010)

TEMA: **01**

| 1 | | 2 | | 3 | | 4 | 5 | | Nota Final |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 0.5 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1.5 | |
| | | | | | | | | | |

Para aprobar es necesario sumar por lo menos 6 puntos. Nota: p - 2 TIEMPO: 2 HORAS

**1)** Dada la función: $f(x) = e^{-x} - x^2 + 5x - 4$

a) Halle gráficamente un intervalo (a ; b) con $a, b \in Z \wedge b = a+1$ para cada **raíz.**

b) Calcule la mayor raíz real utilizando el método de Newton Raphson con $\varepsilon < 0.001$

**2)** Dada la siguiente tabla de datos:

| $x_i$ | 0 | 1 | 4 | 5 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x_i)$ | 4 | 3 | 0 | k | 123 | 220 |

a) Halle, si es posible, el valor de $k \in R$ tal que por todos los puntos dados **pase un** polinomio de grado 3.

b) Con el valor de k hallado en a), indique cuántos polinomios de grado **4 pasan** por los puntos dados, y cuántos de grado 10 pasan por ellos. Justifique.

+ **3)** Dada la integral: $I = \int_1^3 x^4 \ln(x)\, dx$

a) Indique cuántos subintervalos habría que tomar para que al calcular la **integral** por Trapecios se asegure un error $E \leq 10^{-3}$

b) Si es posible, resuelva por Simpson con h=0.2 trabajando con 5 dígitos y redondeo simétrico en todos los cálculos.

X **4)** Aproxime por una recta de mínimos cuadrados la función $f(x) = \text{sen}(\pi x)$ en **[-1;1]**

**5)** Sea el S.E.L.: $\begin{cases} 4x - y = 1 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$

a) Indique si los métodos iterativos convergen. Justifique.

b) Realice tres iteraciones por el método de Gauss-Seidel con **F(4, 10, 34, 56)** y redondeo simétrico.

RESPUESTAS PARCIAL 2 TEMA 01

**Ejercicio n° 1:**

a) [-4;-3] , [0,1] y [4,5]

b)

| x | f | f' |
|---|---|---|
| 4 | 0,01831564 | -3,01831564 |
| 4,00606817 | -3,6486E-05 | -3,03034116 |
| 4,00605613 | -1,4365E-10 | -3,0303173 |

**Ejercicio n° 2:**

a) K=19

b) De grado 4: cero De grado 10: infinitos

**Ejercicio n° 3:**

a) $f(x) = x^4 \ln(x) \Rightarrow f'(x) = x^3 ( 4 \ln(x)+ 1 ) \Rightarrow f''(x) = x^2 ( 12 \ln(x) + 7 )$

MAX f'' en [1,3] es: $f''(3)= 9 (12 \ln(3)+7) = 181{,}650127$

$| E | = 1/6\, h^2\, 181{,}650127 \leq 10^{-3} \Rightarrow \boxed{h \leq 0{,}005747219 \text{ Tomo } h= 0.008} \wedge n = 250$

b) A = 43,7137232

$0{,}008 > 0{,}0057$

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,2 | 1,4 | 1,6 | 1,8 | 2 | 2,2 | 2,4 | 2,6 | 2,8 | 3 |
| 0 | 0,37806198 | 1,29259174 | 3,08021578 | 6,17034929 | 11,0903549 | 18,4700867 | 29,0459516 | 43,6645798 | 63,2861752 | 88,9875954 |

**Ejercicio n° 4:**

p(x) = 1.215854204 x

**Ejercicio n° 5:**

```
Iteración número 1.
    0.2500
    0.5833


Iteración número 2.
    0.3958
    0.5347


Iteración número 3.
    0.3837
    0.5388
```

16:20

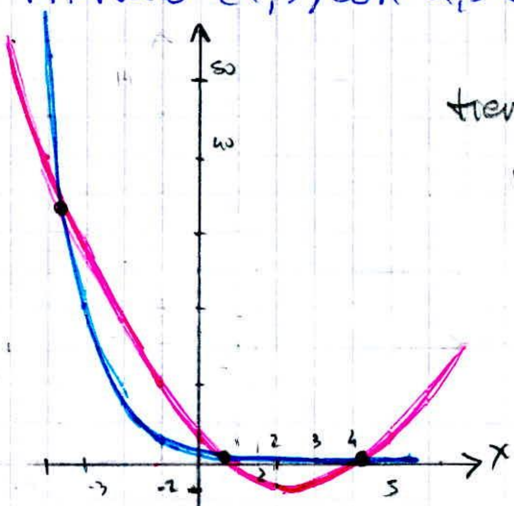
Mat Sup. 2° parcial Jueves 2010

① Dada la función $f(x)=e^{-x}-x^2+5x-4$

a) Halle gráficamente un intervalo $(a;b)$ con $a,b \in \mathbb{Z} \wedge b=a+1$ para cada raíz.

$e^{-x}=x^2-5x+4$

$e^{-x}=(x-2{,}5)^2-2{,}25$




tiene 3 raíces:

1 raíz $\in [-4;-3]$

1 raíz $\in [0;1]$

1 raíz $\in [4;5]$

b) Calcule la mayor raíz utilizando el método Newton-Raphson con $\varepsilon < 0{,}001$

$$x_{m+1}=x_m-\frac{f(x_m)}{f'(x_m)}$$

$f(x)=e^{-x}-x^2+5x-4 \rightarrow f'(x)=-e^{-x}-2x+5$

$x_0=4$

$\left.\begin{array}{l} x_1=4{,}006068166 \\ x_2=4{,}006056125 \end{array}\right\} \varepsilon < 10^{-5}$

$\boxed{x=4{,}006056125}$

② Dada la sig tabla de datos:

| $x_i$ | 0 | 1 | 4 | 5 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x_i)$ | 4 | 3 | 0 | k | 123 | 220 |

a) Halle, si es posible, el valor de $k \in \mathbb{R}$ tal que por todos los puntos dados pase un polinomio de grado 3.

| $x_i$ | $f(x_i)$ | $\Delta f$ | $\Delta^2 f$ | $\Delta^3 f$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 4 | | | |
| | | -1 | | |
| 1 | 3 | | 0 | |
| | | -1 | | 1 |
| 4 | 0 | | 7 | |
| | | 41 | | |
| 7 | 123 | | | |

$p(x)=4-x+\underbrace{x\overbrace{(x-1)(x-4)}^{x^2-5x+4}}_{x^3-5x^2+4x}=$

$p(x)=x^3-5x^2+3x+4$

$p(0)=4$ ✓ $p(1)=3$ ✓ $p(4)=0$ ✓ $p(7)=123$ ✓

Verifico en los otros dos puntos: $p(8)=220$ ✓ $p(5)=\boxed{k=19}$

b) Con el valor de k hallado en a), indique cuántos polinomios de grado 4 pasan por los puntos dados y cuántos de grado 10 pasan por ellos. Justifique

El polinomio interpolante de grado mínimo es único y es de grado 3. Por lo tanto $\nexists$ polinomios de grado 4.

$\exists\, \infty$ polinomios de grado 10

③ Dada la integral: $I = \int_1^3 x^4 \ln(x)\, dx$

a) Indique cuántos subintervalos habría que tomar para que, al calcular la integral por trapecios, se asegure un error $\varepsilon \leq 10^{-3}$

$$|\varepsilon_T| = \frac{b-a}{12} h^2 |f''(\zeta)| = \frac{1}{6} h^2 |f''(\zeta)| < 10^{-3}$$

$$f(x) = x^4 \ln(x) \longrightarrow f'(x) = 4x^3 \ln(x) + x^{\cancel{4}3} \frac{1}{\cancel{x}} = x^3(4\ln(x)+1) = f'(x)$$

$$f''(x) = 3x^2(4\ln(x)+1) + x^{\cancel{3}2} \cdot \frac{4}{\cancel{x}_1} = x^2(12\ln(x)+3+4) = x^2(12\ln(x)+7) = f''_x$$

$f''(x)$ es una función creciente en $[1;3]$ $\therefore$ es máx en $x=3 \rightarrow f''_{máx} = 181{,}65$

$$\rightarrow \frac{1}{6} h^2 |f''(\zeta)| < 10^{-3} \rightarrow h^2 < \frac{10^{-3} \cdot 6}{181{,}6501272} = 0{,}0000303053014$$

$$\rightarrow h < 0{,}005574721934 \xrightarrow{m h = 2} m > 363{,}30$$

$$m = 364 \rightarrow h = 0{,}00549\ldots$$

$$m = 400 \rightarrow h = 0{,}005 \rightarrow \boxed{m = 400}$$

b) Si es posible, resuelva por Simpson con $h = 0{,}2$ trabajando con 5 dígitos y redondeo simétrico en todos los cálculos

$m \cdot h = 2 \longrightarrow m = \frac{2}{0{,}2} = 10 \rightarrow$ es par $\therefore$ se puede utilizar el método Simpson

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 1 | 1,2 | 1,4 | 1,6 | 1,8 | 2 | 2,2 | 2,4 | 2,6 | 2,8 | 3 |
| $f(x_i)$ | 0 | 0,37806 | 1,29259 | 3,08022 | 6,17035 | 11,09035 | 18,47009 | 29,04595 | 43,66458 | 63,28618 | 88,98760 |

$$A_S = \frac{h}{3}(E + 4I + 2P) = \frac{0{,}2}{3}\left[88{,}9876 + 4 \times (f_1 + f_3 + f_5 + f_7 + f_9) + 2(f_2 + f_4 + f_6 + f_8)\right] =$$

$$= \frac{0{,}2}{3}(88{,}9876 + 427{,}52304 + 139{,}19522) = 43{,}713724$$

$$\boxed{A_S = 43{,}71372}$$

④ Aproxime por una recta de mínimos cuadrados la función $f(x) = \text{sen}(\pi x)$ en $[-1;1]$

$\int_{-1}^{1} 1\, dx = 2$ $\quad \int_{-1}^{1} x\, dx = 0$ $\quad \int_{-1}^{1} x^2 dx = 2/3$ $\quad \int_{-1}^{1} x\, \text{sen}(\pi x)\, dx = 0{,}636619772$ $\quad \int_{-1}^{1} \text{sen}(\pi x)\, dx = 0$

$$\begin{array}{cc} a_0 & a_1 \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0{,}636619772 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} a_0 = 0 \\ a_1 = 0{,}954929658 \end{array}$$

$$\boxed{y = 0{,}954929658\, x}$$

Tema 01
2010

(5) Sea el SEL: $\begin{cases} 4x - y = 1 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$

a) Indique si los métodos iterativos convergen. Justifique

La matriz asociada a ese sistema es: $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ x & -3 \end{pmatrix}$
y resulta ser diagonal dominante
Por lo tanto, converge.

b) Realice tres iteraciones por el método de Gauss-Seidel con $F(4,10,34,56)$ y redondeo simétrico.

4 → # dígitos; 10 → base del sistema (decimal); 34 y 56 son cotas inf y sup.

Ecuaciones iterativas: $x^k = \dfrac{1 + y^{k-1}}{4}$ ; $y^k = \dfrac{2 - x^k}{3}$

parto de $x_0 = (0,0)$

$x_1 = (0{,}25 \ ; \ 0{,}5833)$ ✓

$x_2 = (0{,}3958 \ ; \ 0{,}5347)$ ✓

$x_3 = (0{,}3837 \ ; \ 0{,}5388)$ ✓